

Оценки производной π -длины π -разрешимой группы, у которой π -холловы подгруппы свободны от n -ых степеней

Д.В. Грицук, А.А. Трофимук, Т.А. Артюшеня

Учреждение образования

«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

Рассматриваются только конечные группы. Важным направлением теории групп является получение оценок инвариантов групп, у которых силовские подгруппы ограничены.

Напомним, что число n свободно от m -х степеней, если p^m не делит n для всех простых p . При $m = 2$ говорят, что n свободно от квадратов, при $m = 3$ – от кубов.

В.С. Монахов установил зависимость инвариантов разрешимой группы от порядков силовских подгрупп. В частности, если порядок разрешимой группы G не делится на $(n + 1)$ -е степени простых чисел, то производная длина группы $G / \Phi(G)$ не превышает $3 + n$.

В.С. Монаховым в 2012 году был предложен аналог производной длины для π -разрешимой группы, а именно понятие производной π -длины.

Вполне естественно развить этот результат на случай π -разрешимой группы и производной π -длины.

Цель статьи – установление зависимости оценки производной π -длины π -разрешимой группы от порядков силовских p -подгрупп ($p \in \pi$).

Материал и методы. В данной работе используются методы доказательства абстрактной теории групп.

Результаты и их обсуждение. Следует отметить, что оценка производной длины, полученная В.С. Монаховым на основании общей методики исследования разрешимых групп с ограничениями на порядки силовских подгрупп, является неточной при малых значениях порядков. Например, если порядки силовских подгрупп разрешимой группы G свободны от кубов, т.е. $n \leq 2$, из работы В.С. Монахова и А.А. Трофимука следует, что производная длина такой группы не превышает 3.

Исследование оценок производной π -длины π -разрешимых групп впервые было проведено В.С. Монаховым, Д.В. Грицуком, О.А. Шпырко. Так, если порядок π -холловой подгруппы свободен от кубов, то все силовские p -подгруппы,

$p \in \pi$, являются абелевыми. В.С. Монаховым и Д.В. Грицуком показано, что производная π -длина таких π -разрешимых групп не превышает $|\pi(G_\pi)|$. В работе Д.В. Грицука были найдены оценки производной π -длины π -разрешимой группы с бициклическими силовскими p -подгруппами, $p \in \pi$.

Заключение. Таким образом, в данной статье получены оценки производной π -длины π -разрешимой группы G у которой порядок π -холловой подгруппы свободен от n -ых степеней как в случае произвольного n , так и в случае малых его значений. Так, например, производная π -длина π -разрешимой группы, порядок π -холловой подгруппы которой свободен от кубов, не превышает 3.

Полученные результаты являются новыми и позволяют использовать данную работу для дальнейшего исследования конечных частично разрешимых групп с заданными свойствами некоторых силовских подгрупп.

Ключевые слова: π -разрешимая группа, производная π -длина, π -холлова подгруппа.

Estimations of the Derived π -Length of a π -Solvable Group in which Hall π -Subgroups are n -th Power-Free

D.V. Gritsuk, A.A. Trofimuk, T.A. Artiushenia

Educational Establishment «Brest State A.S. Pushkin University»

We consider only finite groups. An important direction of the theory of groups is the investigation of estimates of the invariants of groups for which the Sylow subgroups are bounded.

Let's recall that the number n is m -th power-free, if n is not divisible by p^m for all prime p . When $m = 2$, we say that n is square-free, if $m = 2$, we say that and n is cube-free $m = 3$.

V.S. Monakhov established the dependence of the invariants of a solvable group on the orders of Sylow subgroups. In particular, if the order of a solvable group G is not divisible by $(n+1)$ -th powers of primes, then the derived length of $G / \Phi(G)$ does not exceed $3 + n$.

V.S. Monakhov in 2012 proposed an analog of the derived length for a π -solvable group, namely, the concept of the derived π -length.

It is quite natural to develop this result in the case of a π -solvable group and the derived π -length.

The aim of the paper is to establish the dependence of the estimate of the derived π -length of a π -solvable group on the orders of Sylow p -subgroups ($p \in \pi$).

Material and methods. *In this paper we used the methods of abstract group theory.*

Findings and their discussion. *It should be noted that the estimate of the derived length obtained by V.S. Monakhov, on the basis of the general method of investigating soluble groups with restrictions on the orders of Sylow subgroups, is inaccurate for small orders. For example, if the orders of the Sylow subgroups of a solvable group G are cube-free, i.e. $n \leq 2$, then from the work of V.S. Monakhov and A.A. Trofimuk it follows that the derived length of such a group does not exceed 3.*

The investigation of the estimates of the derived π -length of a π -solvable groups was first carried out by V.S. Monakhov, D.V. Gritsuk, O.A. Shpyrko. Thus, if the order of a Hall π -subgroup is cube-free, then all Sylow p -subgroups, $p \in \pi$, are abelian. V.S. Monakhov and D.V. Gritsuk showed that the derived π -length of a such π -solvable groups does not exceed $|\pi(G_\pi)|$. In the work of D.V. Gritsuk estimates of the derived π -length of a π -solvable groups with bicyclic Sylow p -subgroups, $p \in \pi$, are obtained.

Conclusion. *Thus, in this paper we obtain estimates of the derived π -length of a π -solvable group G in which π -Hall subgroups are n -th power-free. Analogous result was obtained for small values of n . Thus, for example, the derived π -length of a π -solvable group in which the order of a Hall π -subgroup is cube-free does not exceed 3.*

The research findings are new and allow us to use this work for further investigation of finite partially solvable groups with given properties of certain Sylow subgroups.

Key words: *π -solvable group, derived π -length, π -Hall subgroup.*